Operaciones Sobre Señales
Versión 1

Gabriel Marzinotto

November 13, 2013

Un aspecto de interés en el estudio de las señales, es conocer el conjunto de operaciones que se pueden realizar sobre estas. Este conjunto de operaciones puede dividirse en:

1 Tipos de Operaciones

1) Operaciones de multiplicación por un escalar

Esta operación toma una señal $f(t)$ ó $f[k]$ y da como resultado la señal $a \cdot f(t)$ ó $a \cdot f[k]$ respectivamente, donde a es un escalar cualquiera.

2) Operaciones de adelanto y atraso temporal

Esta operación toma una señal $f(t)$ ó $f[k]$ y produce una salida de la forma $f(t+a)$ ó $f[k+a]$ que es la misma señal desplazada hacia la izquierda a unidades de tiempo, donde a es una constante que puede ser real en tiempo continuo, o entera en tiempo discreto. Si $a < 0$ tenemos la operación de atraso,

en donde la señal se desplaza hacia la derecha.

3) Operaciones de escalamiento temporal

Esta operación consiste en realizar una compresión o expansión del eje temporal de una señal $f(t)$ ó $f[k]$ para producir una nueva señal $f(at)$ ó $f[ak]$. Si el escalar $a < 1$ la operación es de expansión temporal y si $a > 1$ la operación es de compresión temporal. Para recordar esto más fácilmente, piense en las señales de la forma $Cos(\omega t)$ en estas señales ω representa la frecuencia en radianes y a medida que aumenta, podemos ver que la cantidad de repeticiones de la onda por unidad de tiempo aumenta, esto es lo que representa la compresión temporal.

4) Operaciones de inversión temporal

Esta operación consiste en tomar una señal $f(t)$ ó $f[k]$ y producir como salida su correspondiente $f(-t)$ ó $f[-k]$ que no es más que la señal reflejada con respecto al eje Y, como si se intercambiaran las $t < 0$ con las $t > 0$ o las $k < 0$ con las $k > 0$.

1.1 Ejemplo

Sea $x(t)$ la señal que se describe a continuación:

$$x(t) = \begin{cases} t+2 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

Calcule $x(t-3)$, $x(t+2)$, $x(2t)$ y $x(-t)$:

Para $x(t-3)$ tenemos una operación de atraso temporal y el resultado será la señal desplazada hacia la derecha 3 unidades.

$$x(t-3) = \begin{cases} t-1 & 1 < t < 2 \\ 1 & 2 < t < 4 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

Para $x(t+2)$ tenemos una operación de adelanto temporal y el resultado será la señal desplazada hacia la izquierda 2 unidades.

$$x(t+2) = \begin{cases} t+4 & -4 < t < -3 \\ 1 & -3 < t < -1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

Para $x(2t)$ tenemos una operación de compresión temporal y el resultado será la señal comprimida en una escala 2:1

$$x(2t) = \begin{cases} 2t+2 & -1 < t < -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

Para $x(-t)$ tenemos una operación de inversión temporal y el resultado será la señal reflejada con respecto al eje Y.

$$x(-t) = \begin{cases} 2-t & 1 < t < 2 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

2 Operaciones Compuesas

Realizar operaciones sobre señales parece súmamente sencillo, basta con recordar unos simples trucos y aplicarlos rápidamente. Sin embargo, la dificultad crece enormemente cuando aplicamos más de una operación de manera simultánea, ya que no es lo mismo realizar una inversión temporal, seguida de un desplazamiento o realizar un desplazamiento temporal y luego una inversión de los ejes. Todo se complica aún más si nos vemos obligados a realizar las 4 operaciones de manera simultanea, por este motivo, surge la necesidad de describir un método práctico que nos permita calcular el resultado de las operaciones sobre señales no importa cuales sean. Este método se ve reflejado en el siguiente problema

2.1 Ejemplo 2

Si se tiene la misma señal $x(t)$ del ejemplo anterior:

$$x(t) = \begin{cases} t+2 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

Calcule $x(2t-1)$ y $x(\frac{1}{2}t+2)$

Para calcular $x(2t-1)$ la vía más directa es sustituir directamente t por $2t-1$ en la representación explicita de la función. Es importante realizar este cambio tanto en el valor de la función como en los límites de la misma

$$x(2t-1) = \begin{cases} (2t-1)+2 & -2 < 2t-1 < -1 \\ 1 & -1 < 2t-1 < 1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

simplificando y organizando las inecuaciones de los intervalos se tiene:

$$x(2t-1) = \begin{cases} 2t+1 & -\frac{1}{2} < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

El procedimiento es el mismo para cualquier otra operación sobre señales, para $x(\frac{1}{2}t+2)$ tenemos:

$$x(\frac{1}{2}t+2) = \begin{cases} (\frac{1}{2}t+2)+2 & -2 < \frac{1}{2}t+2 < -1 \\ 1 & -1 < \frac{1}{2}t+2 < 1 \\ 0 & el\ resto \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}t+4 & -8 < t < -6 \\ 1 & -6 < t < -2 \\ 0 & el\ resto \end{cases}$$

De esto puede concluirse que al combinar la operación de compresión temporal y la de desplazamiento como se hizo en los 2 ejemplos anteriores, es equivalente a realizar primero el desplazamiento temporal y luego el cambio en la compresión del tiempo.

2.2 Ejemplo 3

Ahora calcule $x(-t+1)$ y $x(-t-3)$

El método para obtener $x(-t+1)$ es el mismo. Sustituir la t en la definición explícita de la función, esta vez hay que tener más cuidado con el sentido de la desigualdad.

$$x(-t+1) = \begin{cases} (-t+1)+2 & -2 < -t+1 < -1 \\ 1 & -1 < -t+1 < 1 \\ 0 & el\ resto \end{cases} = \begin{cases} -t+3 & 3 > t > 2 \\ 1 & 2 > t > 0 \\ 0 & el\ resto \end{cases}$$

Y para $x(-t-3)$ tenemos

$$x(-t-3) = \begin{cases} (-t-3)+2 & -2 < -t-3 < -1 \\ 1 & -1 < -t-3 < 1 \\ 0 & el\ resto \end{cases} = \begin{cases} -t-1 & -1 > t > -2 \\ 1 & -2 > t > -4 \\ 0 & el\ resto \end{cases}$$

Y de este ejemplo puede concluirse que al realizar una inversión temporal junto con desplazamiento, se debe ser meticuloso con el orden. Lo que para $x(-t+1)$ a priori parece ser una inversión temporal con un desplazamiento hacia la izquierda de una unidad, termina siendo la misma inversión temporal pero con un desplazamiento hacia la derecha. Esto es así porque una vez invertidos los ejes temporales, la operación de adelanto en el tiempo t se vuelve equivalente a la operación de atraso en $-t$ y viceversa. Es natural si pensamos que en un mundo donde se intercambie el pasado con el futuro, adelantarse en el tiempo implicaría irse hacia el pasado.

2.3 Ejemplo 4

Finlmente determine $x(-2t+1)$ y $x(-\frac{1}{2}t-1)$

Finalmente tenemos el caso mas complicado, donde inversión, desplazamiento y contracción temporal se presentan combinados. La manera de atacar este problema sigue siendo la misma que en todos los casos anteriores. Para obtener $x(-2t+1)$:

$$x(-2t+1) = \begin{cases} (-2t+1)+2 & -2 < -2t+1 < -1 \\ 1 & -1 < -2t+1 < 1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases} = \begin{cases} -2t+3 & \frac{3}{2} > t > 1 \\ 1 & 1 > t > 0 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$

Y para obtener $x(-\frac{1}{2}t-1)$:

$$x(-\frac{1}{2}t-1) = \begin{cases} (-\frac{1}{2}t-1)+2 & -2 < -\frac{1}{2}t-1 < -1 \\ 1 & -1 < -\frac{1}{2}t-1 < 1 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}t+1 & 2 > t > 0 \\ 1 & 0 > t > -4 \\ 0 & \textit{el resto} \end{cases}$$